

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

共軛梯度逆向分析法應用在複雜熱對流問題的困難點之研究

研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型

計畫編號：NSC 97-2221-E-168-041-

執行期間：97年08月01日至98年07月31日

執行單位：崑山科技大學機械工程系

計畫主持人：陳文立

計畫參與人員：碩士級-專任助理人員：Rodrigo

碩士班研究生-兼任助理人員：黃姿倩

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 98年09月26日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

※

※ 共軛梯度逆向分析法應用在複雜熱對流問題的困難點之研究 ※

※

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2221-E-168-041

執行期間： 97 年 08 月 01 日至 98 年 07 月 31 日

計畫主持人：陳文立

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：崑山科技大學機械系

中 華 民 國 98 年 09 月 31 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

共軛梯度逆向分析法應用在複雜熱對流問題的困難點之研究

計畫編號：NSC 97-2221-E-168-041

執行期限：97年8月1日至98年7月31日

主持人：陳文立 執行機構及單位名稱：崑山科技大學機械系

一、中文摘要

本計畫將逆向分析法應用在流過一個串級矩形葉片的流場中預測入口流體的溫度，本計畫的目的是要研究將逆向分析法應用在包含複雜流場的熱對流問題時所遭遇的困難；因此量測物理量故意選擇分佈在流場中5個不同的位置，且每個位置均被某個特殊的流場現象所涵蓋，如邊界層或迴流區。另外，計畫中亦將測試3個不同的雷諾數，分別為1、100、500；所以5個位置與3個雷諾數總共有15個測試條件，而這些條件可以讓逆向分析法在熱對流問題的應用充分得到試驗。研究結果顯示在逆向熱對流問題中，預測點與量測點之間的相對位置是決定逆向運算準確度的最重要關鍵因素。

關鍵詞：逆向運算、共軛梯度法、計算流力分析。

Abstract

In this project, an inverse algorithm based on the conjugate gradient method is applied to a steady flow over a cascade of rectangular blades to estimate the inlet flow temperature. The objective is to study the difficulties associated with inverse heat convection problems. Therefore, the measurement quantity has been deliberately placed at five different locations over the domain, each of them covered by a unique flow feature. In addition, three different inlet flow condition with the Reynolds number being 1, 100, and 500 will also be tested. Overall, the combinations of 5 locations and 3 Reynolds numbers produce 15 different test cases to be examined in this project. The results show that the relative position between the estimated and measurement quantities is the most important factor to the success of an inverse heat convection problem.

Keywords: Inverse method, Conjugate gradient, CFD.

二、計畫緣由與目的

逆向分析問題在本質上是一種 ill-posed 的問題（其解非唯一），但近年來逆向分析被成功的應用在許多熱傳導問題上以準確地量測某些物理量如熱源或邊界熱傳量或邊界溫度以及某些材料性質如熱傳係數等如[1-5]。逆向分析可取代部份實驗量測工作，簡化實驗程序，因此為十分有用的一

種技術。雖然逆向分析在熱傳導問題的應用似乎蓬勃地發展，但其在熱對流問題的應用則相對地較少出現在文獻上 [6-11]。在這些文獻中，例如 [8-10]，是將逆向分析應用在簡單的流場如渠道流或圓管流中；而在這樣的流場中並沒有複雜的流動現象如迴流區或因逆壓而產生之邊界層增厚。因此量測物理量與預測物理量之間通常存在著強烈的函數關係。然而，在已發表的文獻中還是有少數是將逆向分析應用在複雜的流場如封閉空間內的自然對流、流過多圓柱的流場、以及三維彎曲渠道流等 [6, 7, 11]。在這些研究中，有些問題的量測物理量與預測物理量位置非常接近邊界熱傳通量以至於它們事實上只受到熱傳導的影響而非熱對流的影響 [7, 11]。而 [6] 中所預測的物理量為封閉空間中的熱源，但其自然對流現象事實上就是由熱源所引起的；因此封閉空間中任何物理量與熱源本身均存在著強烈的函數關係。具主持人所知，目前並無任何文獻是關於將逆向分析法應用在某些量測物理量與預測物理量之間只存在著微弱的函數關係時的熱對流問題，而且也沒有任何文獻專門討論這個問題的可行性或困難度，只有在某些論文如 [6] 中以一句話蜻蜓點水似地帶過「這類問題由於其數學式比較複雜，所以比較困難」。

基本上，逆向分析法是否能成功地應用在某個問題取決於問題中的量測物理量與預測物理量之間是否存在著強烈的函數關係。如果在某個問題中，其量測物理量與預測物理量之間只存在著微弱的函數關係，也就是任何預測物理量的擾動幾乎無法造成量測物理量的改變，則逆向分析法通常是不會成功的。我們可用以下例子說明：以逆向分析法應用的最成功的穩態熱傳導問題來說，其統御方程式為橢圓型態 (elliptic type) 的偏微分方程式，而這種方程式其解的特點在於整個解的空間中任意點之間均存在著強烈的函數關係；也就是說，解的空間中任意點的擾動會強烈地影響其他所有的點，而且這種點與點間強烈的函數關係與點所在位置無關。所以量測物理量與預測物理量之間的相對位置在穩態熱傳導問題並非影響成敗的重要因素。反觀熱對流問題其統御方程式為拋物線型態 (parabolic type) 的偏微分方程式，其解的特點在於物理量的傳播是有方向性的；也就是主要的傳播是沿著流線方向的，而且雷諾數愈高時，這種現

象愈顯著。所以，上游的物理量變化會強烈地影響下游的物理量；反之，下游物理量的擾動對上游的物理量卻沒什麼影響。在這種特性之下，量測物理量與預測物理量之間的相對位置就顯得非常重要。基本上，量測物理量必須位於預測物理量的下游，逆向分析法才比較可能成功，如文獻[9]的例子。暫態熱傳導問題的統御方程式也是橢圓型態的偏微分方程式，量測物理量與預測物理量之間的相對位置變成相對時間點，而它們彼此的相對時間點也成為逆向分析中重要的考量因素。所以本計畫的結果有部份將也適用於暫態熱傳導問題的逆向分析。

雖然熱對流問題的逆向分析有量測物理量與預測物理量之間的相對位置的考量，已增加求解的困難度了，但它的困難點並非僅止於此。當熱對流問題的方向性傳播加上複雜的流場會產生更嚴重的問題，而這新的問題可能切斷量測物理量與預測物理量之間的函數關係，即使前者是位於後者的下游。舉例而言，假設量測物理量位於邊界層內部或在迴流區內，而預測物理量是在上游的自由流中（free-stream region），雖然這樣的配置符合預測物理量在上游而量測物理量在下游的原則，但事實上自由流中的擾動對邊界層或迴流區內部的影響十分有限，尤其是在高雷諾數的情形之下；所以這就造成量測物理量與預測物理量之間只存在著微弱的函數關係而使得逆向分析難以進行。

有了這些認知後，本計畫設計一個包含增厚邊界層與迴流區的熱對流逆向分析問題，以更深一步定性與定量地研究熱對流逆向分析問題的困難點。本計畫採用的逆向分析法為共軛梯度法（conjugate gradient method），這個方法是將熱傳問題（又稱直接問題，direct problem）轉換成一個敏感度問題（sensitivity problem）以及一個連接問題（adjoint problem），並且以疊代方式求解這三個問題來將預測誤差值極小化，如文獻[2, 12-18]所述。本計畫採用的流場為流過一串級矩形葉片的流場，以模擬渦輪機內流體流過串級葉片的情形。選擇矩形葉片的主要考量為統御方程式可用直角座標描述，因此在理論分析時較為簡單。雖然矩形葉片的外形與真實葉片的外形相去甚遠，但它可一如真實葉片一樣可在攻角不為零的狀況下在壓力面（pressure side）與吸引面（suction side）產生截然不同的流場。在壓力面為順壓加速流，因此邊界層不會分離；而在吸引面為逆壓減速流，其高功角或高雷諾數的條件下邊界層可能分離而在葉片後段產生大迴流區。因此矩形葉片流場仍可具備測試熱對流逆向分析問題困難點所需的複雜流場特質。本計畫將預測物理量設為入口溫度，而量測物理量為分散在下游流場中不同區域的溫度；而每個區域皆包含一樣獨特的流場現象如自由流、邊界層、或迴流區以讓我們可以檢測這些流場現象對逆向分析問題的進行與其預測精確度有何影響。

三、研究方法及成果

1. 研究方法

直接問題

我們考慮以下二維的熱傳問題以用來說明推導預測入口溫度所需的數學式：圖一表示矩形葉片的幾何形狀與尺寸與圍繞它周圍的計算空間。這個計算空間在 y -方向剛好包含一個葉片，而在 x -方向則是由葉片前端（leading edge）向上游沿伸 0.3 個葉片長度（chord length），並且從葉片後端（trailing edge）向下游沿伸 2 個葉片長度。入口流與葉片的攻角為 θ ，入口流溫度為 $T_m(y)$ 。另外我們假設葉片中心有一個厚度為零的固定低溫 T_l 邊界以模擬葉片內部的冷卻流體效應。在葉片表面，我們假設流體速度為零（no-slip condition）；但就能量方程式而言，葉片表面事實上是流、固體邊界，所以在此邊界有共軛熱傳現象。其他的假設為所有流、固體的物理性質皆為定值；且重力效應不考慮。所以直接問題為一個強迫對流熱傳問題。我們引進下列的無因次參數：

$$\begin{aligned} X &= x/C, Y = y/C, U = u/V_0, V = v/V_0, \\ P &= \frac{p}{\frac{1}{2}\rho V_0^2}, T^* = T/(T_h - T_l) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 T_h 和 T_l 分別為最高與最低溫。則二維穩態無因次統御方程式與邊界條件可表示如下：

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

$$U \frac{\partial T_f^*}{\partial X} + V \frac{\partial T_f^*}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_f^*}{\partial Y^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T_s^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s^*}{\partial Y^2} = 0, \quad (6)$$

$$U = \cos\theta, V = \sin\theta, \text{ and } T_f^*(0, Y) = T_m^*(Y), \text{ at } X = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial T_f^*}{\partial X} = 0, \text{ at } X = L/C,$$

$$U(X, 0) = U(X, H/C), V(X, 0) = V(X, H/C),$$

$$T_f^*(X, 0) = T_f^*(X, H/C), \quad (7)$$

$$U = V = 0, T_f^* = T_s^*, \text{ and } k_f \frac{\partial T_f^*}{\partial X} = k_s \frac{\partial T_s^*}{\partial X},$$

$$\text{at } X = x_1/C \text{ and } X = x_2/C,$$

$$U = V = 0, T_f^* = T_s^*, \text{ and } k_f \frac{\partial T_f^*}{\partial Y} = k_s \frac{\partial T_s^*}{\partial Y},$$

$$\text{at } Y = y_1/C \text{ and } Y = y_2/C, \quad (8)$$

其中 Re 以及 Pr 分別為雷諾數與 Prandtl 數，下標 f 與 s 分別代表流體與固體。由於在強迫對流問題中速度場不受溫度場影響，所以(2)-(4)在獨立求解；而後，直接問題就只剩下(5)與(6)式與其邊界條件了。

逆向問題

就逆向問題而言，入口溫度 $T_m^*(Y)$ 是(5)-(8)式中唯一的未知函數；另外，量測點的溫度讀數也假

設已知。逆向分析的目的就是用已知的量測點溫度來預測未知的入口溫度 $T_m^*(Y)$ 。若已知的量測點溫度以 $\Theta^*(X, Y)$ 表示，則本逆向問題可簡述如下：使用已知的量測溫度 $\Theta^*(X, Y)$ 來推測未知的入口溫度 $T_m^*(Y)$ 。

逆向分析方程式的推導是由將下式最小化開始：

$$J[T_m^*(Y)] = \sum_{i=1}^M [T_f^*(X_i, Y_i) - \Theta^*(X_i, Y_i)]^2, \quad (9)$$

其中下標 i 代表第 i 個溫度量測點，而 M 是總量測點數目； $T_f^*(X_i, Y_i)$ 是計算過程中在量測點 $(X, Y) = (X_i, Y_i)$ 的估計溫度。估計溫度是由直接問題代入猜測的入口溫度 $\tilde{T}_m^{*K}(Y)$ 所得到的值。這裏的 $\tilde{T}_m^{*K}(Y)$ 是代表第 K 次疊代所得的入口溫度。

共軛梯度法的極小化過程

本逆向分析法基本上是使用共軛梯度法並經過程將 $J[T_m^*(Y)]$ 最小化以預測 $T_m^*(Y)$ ：

$$\tilde{T}_m^{*K+1}(Y) = \tilde{T}_m^{*K}(Y) - \beta^K q^K(Y), \quad K = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

其中 β^K 是從 K 次到 $K+1$ 疊代的步行大小 (step size)， q^K 是下降的方向 (尋找方向)，可寫成：

$$q^K(Y) = J'^K(Y) + \gamma^K q^{K-1}(Y), \quad (11)$$

此項即為共軛梯度方向，其中 $J'^K(Y)$ 是 K 次疊代的下降方向，而 $q^{K-1}(Y)$ 是 $K-1$ 次疊代的下降方向。另外，共軛梯度的係數 γ^K 由下式表示：

$$\gamma^K = \frac{\int_{Y=0}^{H/C} [J'^K(Y)]^2 dY}{\int_{Y=0}^{H/C} [J'^{K-1}(Y)]^2 dY} \quad \text{with } \gamma^0 = 0. \quad (12)$$

為了執行(11)式的疊代，我們必需計算疊代的步行大小 β^K 與 $J'^K(Y)$ 函數的梯度。為了計算這兩個量，我們又必需借助敏感度問題 (sensitivity problem) 與連接問題 (adjoint problem)；而這兩個問題可描述如下：

敏感度問題與尋找步行大小

敏感度問題的推導是源自於處理(5) - (8)式的直接問題如下：首先假設 $T_m^*(Y)$ 經過一個微小變化 $\Delta T_m^*(Y)$ ，則 $T_f^*(X, Y)$ 與 $T_s^*(X, Y)$ 可分別產生 $\Delta T_f^*(X, Y)$ 與 $\Delta T_s^*(X, Y)$ 的擾動，然後在直接問題中用 $T_m^* + \Delta T_m^*$ 取代 T_m^* ， $T_f^* + \Delta T_f^*$ 取代 T_f^* 與 $T_s^* + \Delta T_s^*$ 取代 T_s^* ；將這個新式子減去原先的直接問題並忽略所有的二階項即可獲得 ΔT_f^* 與 ΔT_s^* 的敏感度問題方程式：

$$\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Delta T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_s^*}{\partial Y^2} \right) = U \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial X} + V \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T_s^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_s^*}{\partial Y^2} = 0, \quad (13)$$

$$\Delta T_f^*(0, Y) = \Delta T_m^*(Y), \quad \text{at } X = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial X} = 0, \quad \text{at } x = L/C, \quad (15)$$

$$\Delta T_f^*(X, 0) = \Delta T_f^*(X, H/C), \quad (16)$$

$$\Delta T_f^* = \Delta T_s^* \quad \text{and} \quad k_f \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial X} = k_s \frac{\partial \Delta T_s^*}{\partial X}, \quad \text{at } X = x_1/C \quad \text{and} \quad X = x_2/C,$$

$$\Delta T_f^* = \Delta T_s^* \quad \text{and} \quad k_f \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial Y} = k_s \frac{\partial \Delta T_s^*}{\partial Y}, \quad \text{at } Y = y_1/C \quad \text{and} \quad Y = y_2/C.$$

第 $K+1$ 疊代的函數 $J[\tilde{T}_m^{*K+1}(Y)]$ 可用(10)式改寫如下：

$$J[\tilde{T}_m^{*K+1}(Y)] = \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} [T_f^*(\tilde{T}_m^{*K} - \beta^K q^K) - \Theta^*(X, Y)]^2 \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY \quad (17)$$

其中我們將 \tilde{T}_m^{*K+1} 用(11)式取代。另外，若溫度項 $T_f^*(\tilde{T}_m^{*K} - \beta^K q^K)$ 用 Taylor 級數線性化之後，(17)式可寫成：

$$J[\tilde{T}_m^{*K+1}(Y)] = \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} [T_f^*(\tilde{T}_m^{*K}) - \beta^K \Delta T_f^*(q^K) - \Theta^*(X, Y)]^2 \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY \quad (18)$$

其中 $T_f^*(\tilde{T}_m^{*K})$ 是直接問題在量測點 $(X, Y) = (X_i, Y_i)$ 使用 $\tilde{T}_m^{*K}(Y)$ 所得的溫度。敏感度函數 $\Delta T_f^*(q^K)$ 則為讓 $\Delta T_m^*(Y) = q^K(Y)$ 後(13) - (16)式在量測點 $(X, Y) = (X_i, Y_i)$ 的解。另外尋找步行大小 β^K 是將令(18)式對 β^K 微分為零所求得，其表示式如下：

$$\beta^K = \frac{\int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} \Delta T_f^*(q^K) [T_f^*(\tilde{T}_m^{*K}) - \Theta^*] \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY}{\int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} [\Delta T_f^*(q^K)]^2 \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY}. \quad (19)$$

連接問題與梯度方程式

連接問題方程式的推導首先將(5)與(6)分別乘上 Lagrange 乘項 λ_f^* 與 λ_s^* ，然後在空間中積分；接著將積分的結果加到(9)式的右邊即可得 $J[T_m^*(Y)]$ 的表示式：

$$\begin{aligned} J[T_m^*(Y)] = & \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} [T_f^*(X, Y) - \Theta^*(X, Y)]^2 \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY \\ & + \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} \lambda_f^*(X, Y) \cdot \left[\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_f^*}{\partial Y^2} \right) - U \frac{\partial T_f^*}{\partial X} - V \frac{\partial T_f^*}{\partial Y} \right] dXdY \\ & - \int_{Y=y_1/C}^{y_2/C} \int_{X=x_1/C}^{x_2/C} \lambda_f^*(X, Y) \cdot \left[\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_f^*}{\partial Y^2} \right) - U \frac{\partial T_f^*}{\partial X} - V \frac{\partial T_f^*}{\partial Y} \right] dXdY \\ & + \int_{Y=y_1/C}^{y_2/C} \int_{X=x_1/C}^{x_2/C} \lambda_s^*(X, Y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T_s^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s^*}{\partial Y^2} \right) dXdY. \quad (20) \end{aligned}$$

變量 ΔJ 是經由在(20)式中，以 $\Delta T_m^*(Y)$ 、 $\Delta T_f^*(X, Y)$ 、 $\Delta T_s^*(X, Y)$ 擾動 $T_m^*(Y)$ 、 $T_f^*(X, Y)$ 、 $T_s^*(X, Y)$ ，然後減去原來的(20)式並忽略二階項而求得：

$$\begin{aligned} \Delta J[T_m^*(Y)] = & \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} 2[T_f^*(X, Y) - \Theta^*(X, Y)] \Delta T_f^* \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) dXdY \\ & + \int_{Y=0}^{H/C} \int_{X=0}^{L/C} \lambda_f^*(X, Y) \cdot \left[\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Delta T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_f^*}{\partial Y^2} \right) - U \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial X} - V \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial Y} \right] dXdY \\ & - \int_{Y=y_1/C}^{y_2/C} \int_{X=x_1/C}^{x_2/C} \lambda_f^*(X, Y) \cdot \left[\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Delta T_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_f^*}{\partial Y^2} \right) - U \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial X} - V \frac{\partial \Delta T_f^*}{\partial Y} \right] dXdY \\ & + \int_{Y=y_1/C}^{y_2/C} \int_{X=x_1/C}^{x_2/C} \lambda_s^*(X, Y) \cdot \left(\frac{\partial^2 \Delta T_s^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_s^*}{\partial Y^2} \right) dXdY, \quad (21) \end{aligned}$$

其中 δ 為 Dirac 函數。使用敏感度問題的邊界條件，我們可對(21)式的第二與第四項做積分。然後假設 ΔJ 等於零，接著忽略 ΔT_f^* 與 ΔT_s^* 即可得到以下 $\lambda_f^*(X, Y)$ 與 $\lambda_s^*(X, Y)$ 連接問題的統御方程式：

$$-U \frac{\partial \lambda_f^*}{\partial X} - V \frac{\partial \lambda_f^*}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \lambda_f^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \lambda_f^*}{\partial Y^2} \right), \quad (22)$$

$$+ 2[T_f^* - \Theta^*] \cdot \delta(X - X_i) \cdot \delta(Y - Y_i) \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_x^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \lambda_y^*}{\partial Y^2} = 0, \quad (23)$$

$$\lambda_f^* = 0, \text{ at } X = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial \lambda_f^*}{\partial X} + U \lambda_f^* = 0, \text{ at } X = L/C, \quad (25)$$

$$\lambda_f^*(X, 0) = \lambda_f^*(X, H/C), \quad (26)$$

$$\frac{k_s}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \lambda_f^* = k_f \lambda_s^* \text{ and } \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial \lambda_f^*}{\partial X} + U \lambda_f^* = \frac{\partial \lambda_s^*}{\partial X}, \text{ at } X = x_1/C \text{ and } X = x_2/C,$$

$$\frac{k_s}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \lambda_f^* = k_f \lambda_s^* \text{ and } \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial \lambda_f^*}{\partial Y} + V \lambda_f^* = \frac{\partial \lambda_s^*}{\partial Y}, \text{ at } Y = y_1/C \text{ and } Y = y_2/C.$$

最後我們可得到以下的積分項：

$$\Delta J = \int_{Y=0}^{H/C} \left[\frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial \lambda_f^*(0, Y)}{\partial X} + U \lambda_f^*(0, Y) \right] \cdot \Delta T_m^*(Y) dY. \quad (27)$$

引入文獻[2]中的定義，我們可得：

$$\Delta J = \int_{Y=0}^{H/C} J'(Y) \cdot \Delta T_m^*(Y) dY, \quad (28)$$

其中 $J'(Y)$ 為 $J[\Delta T_m^*(Y)]$ 函數的梯度。比較(27)與(28)式，我們可得：

$$J'(Y) = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial \lambda_f^*(0, Y)}{\partial X} + U \lambda_f^*(0, Y). \quad (29)$$

疊代停止條件

假設在沒有量測誤差的情況下，疊代收斂條件為：

$$J(\tilde{T}_{in}^{*K+1}) < \eta, \quad (30)$$

其中 η 為一個微小值。但在真實的情況下，量測溫度多少會有誤差；而誤差會導致逆向分析解趨近於一個受到干擾的不正確解，文獻[19]指出逆向分析解甚至會隨疊代次數增加而產生振盪現象。文獻[20]提出一個解決方法：使用偏離原則 (discrepancy principle) 來決定疊代收斂條件，假設 $T_f^* - \Theta^* \cong \sigma$ ，則由(22)式 η 可改寫成：

$$\eta = M\sigma^2, \quad (31)$$

其中 σ 為量測標準差。

逆向分析程序

逆向分析的計算步驟可簡述如下：

假設 $\tilde{T}_{in}^{*K}(Y)$ 在第 K 次疊代為已知，

第一步：解直接問題(5) - (8)式以求得 $T_f^*(X, Y)$ 與 $T_s^*(X, Y)$ 。

第二步：用(30)式檢查疊代是否滿足收斂條件，若不滿足，則繼續以下步驟。

第三步：解連接問題(22) - (26) 式以求得 $\lambda_f^*(X, Y)$ 與 $\lambda_s^*(X, Y)$ 。

第四步：由(29)式計算梯度函數 $J'(Y)$ 。

第五步：分別由(12)與(11)式計算共軛函數 γ^K 與下降方向 $q^K(Y)$ 。

第六步：設 $\Delta T_m^*(Y) = q^K(Y)$ 然後解敏感度方程(13)-(16) 式以得到 $\Delta T_f^*(X, Y)$ 與 $\Delta T_s^*(X, Y)$ 。

第七步：由(35)式計算尋找步長 β^K 。

第八步：由(10)式計算 $\tilde{T}_{in}^{*K+1}(y)$ ，然後回到第一步。

四、結果與討論

本研究量測點如圖二所示。比較第(5)與(22)

式，我們可以發現它們的對流項符號相反；這表示從 λ_f^* 的角度而言，流體的流向與直接問題相反。

這對整個逆向疊代程序來講是很重要的一環。逆向疊代程序的運作原理可簡述如下：入口不正確的溫度分布 \tilde{T}_{in}^* 在量測點產生誤差值 ($T_f^* - \Theta^*$)，而這誤差值是(22)式的源項，因此在量測點激發了 λ_f^* 的值；而這被激發的 λ_f^* 必需透過逆向流的傳播才能傳到入口以修正 \tilde{T}_{in}^* 。由此可知逆向運算的成功與否取決於預測點與量測點之間的資訊傳播是否通暢。在如葉片流場如此複雜的流場中，預測點與量測點之間的資訊傳播可能會被某些流動現象所阻斷；這將嚴重地影響逆向運算的準確度。在以下的測試中，我們將正確的入口溫度設為 1，也就是 $T_{in}^*(Y) = 1$ ；而逆向運算的入口溫度始猜值 $\tilde{T}_{in}^* = 0.5$ 。從圖三的跡線圖中，我們可看出由量測位置 1 出發的跡線可覆蓋整個入口區，這顯示在量測位置 1 所激發的 λ_f^* 值將可傳至預測值所在位置進而修正預測值。所以將量測點放在位置 1 時逆向運算可以成功。圖四的結果顯示出溫度在量測位置 1 時在所有雷諾數 (1, 100, 500) 下均可正確地預測到入口溫度，其最大誤差小於 2%。圖五顯示：即使位於葉片下游，從量測位置 2 出發的跡線亦可覆蓋整個入口區，所以溫度在量測位置 2 時在所有雷諾數的條件下亦可正確地預測到入口溫度 (見圖六)。

量測位置 4, 5 皆位於葉片的邊界層內，因此從量測位置 4, 5 出發的跡線只有涵蓋一小部分的入口區 (如圖七)，所以逆向運算只有在 $\text{Re}=1$ 時有準確的結果；而在 $\text{Re}=100$ 與 500 時都產生相當大的誤差 (見圖八)。這是因為在 $\text{Re}=1$ 時擴散效應主導數值在計算空間內的傳播，因此預測點與量測點之間的較不重要；而在高雷諾數時對流效應主導數值在計算空間內的傳播，若 λ_f^* 值無法靠對流效應傳至入口區，則逆向運算就無法修正入口溫度。

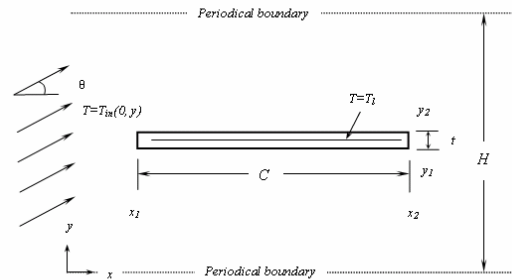
五、結論

1. 在低雷諾數時時擴散效應主導數值在計算空間內的傳播，因此預測點與量測點之間的相對位置較不重要；逆向運算於所有量測位置均可得到準確的結果。
2. 在高雷諾數時對流效應主導數值在計算空間內的傳播，因此數值主要是沿著跡線傳播。葉片的邊界層內出發的跡線無法有效涵蓋入口區，因此 λ_f^* 值無法靠對流效至入口區而導致逆向運算無法正確地修正入口溫度。
3. 在逆向熱對流問題中，預測點與量測點之間的相對位置是決定逆向運算準確度的最重要關鍵因素。

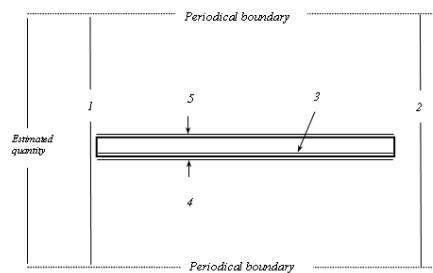
五、參考文獻

- [1] Y. Jarny, M.N. Ozisik, J.B. Bardon, A

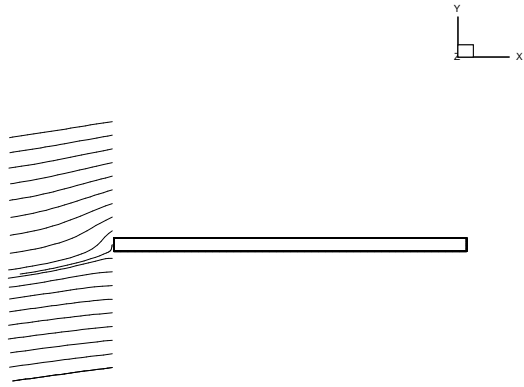
- general optimization method using an adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer* 34 (1991) 2911-2919.
- [2] O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problem*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] K. Kurpisz, A.J. Nowak, *Inverse Thermal Problems*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.
- [4] H.M. Park, O.Y. Chung, J.H. Lee, On the solution of inverse heat transfer problem using the Karhunen-Loeve Galerkin method, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (1999) 127-142.
- [5] Y.C. Yang, S.S. Chu, W.J. Chang, Thermally-induced optical effects in optical fibers by inverse methodology, *J. Appl. Phys.* 95 (2004) 5159-5165.
- [6] H.M. Park, O.Y. Chung, An inverse natural convection problem of estimating the strength of a heat source, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (1999) 4259-4273.
- [7] C.H. Huang, W.C. Chen, A three-dimensional inverse forced convection problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 3171-3181.
- [8] M. Prud'homme, S. Jasmin, Determination of a heat source in porous medium with convective mass diffusion by an inverse method, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 2065-2075.
- [9] Y.K. Hong, S.W. Baek, Inverse analysis for estimating the unsteady inlet temperature distribution for two-phase laminar flow in a channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* 49 (2006) 1137-1147.
- [10] C.K. Chen, L.W. Wu, Y.T. Yang, Application of the inverse method to the estimation of heat flux and temperature on the external surface in laminar pipe flow, *Appl. Thermal Eng.* 26 (2006) 1714-1724.
- [11] W.L. Chen, Y.C. Yang, An inverse problem in determining the heat transfer rate around two in line cylinders placed in a cross stream, *Energy Conversion and Management* 48 (2007) 1996-2005.
- [12] R.M. Hestenes, E. Stiefel, Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 49 (1952) 409-436.
- [13] O.M. Alifanov, N.V. Kerov, Determination of external thermal load parameters by solving the two-dimensional inverse heat conduction problem, *J. Eng. Phys.* 41 (1981) 581-586.
- [14] K.E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1989.
- [15] W.J. Chang, T.H. Fang, C.I. Weng, Inverse determination of the cutting force on nanoscale processing using atomic force microscopy, *Nanotechnology* 15 (2004) 427-430.
- [16] W.J. Chang, T.F. Fang, An inverse method for determining the interaction force between the probe and sample using scanning near-field optical microscopy, *Phys. Lett. A* 348 (2006) 260-265.
- [17] Y.C. Yang, Simultaneously estimating the contact heat and mass transfer coefficients in a double-layer hollow cylinder with interface resistance, *Appl. Thermal Eng.* 27 (2007) 501-508.
- [18] W.L. Chen, Y.C. Yang, H.L. Lee, Inverse problem in determining convection heat transfer coefficient of an annular fin, *Energy Conversion and Management* 48 (2007) 1081-1088.



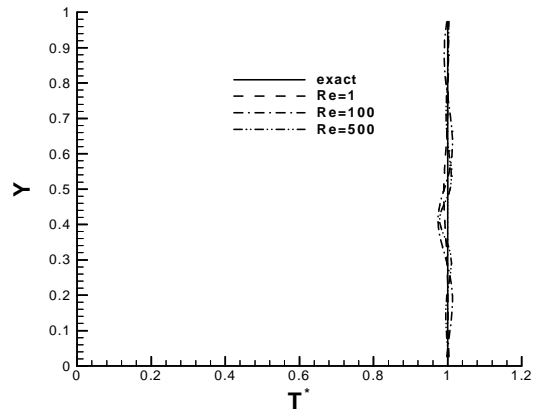
圖一、二維矩形葉片的幾何形狀與邊界條件。



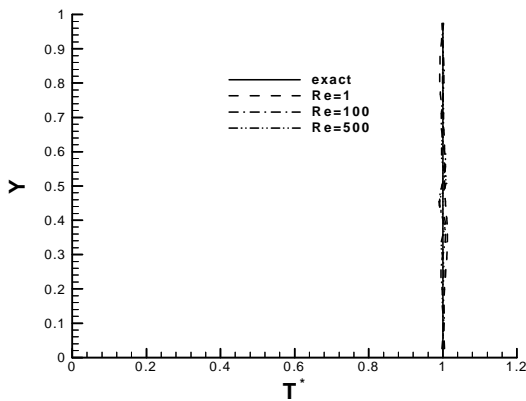
圖二、量測位置分布圖。



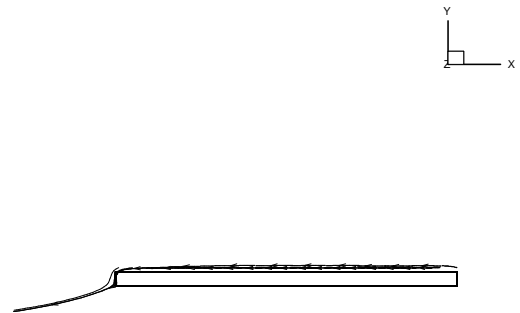
圖三、由 λ_f^* 所視從量測位置 1 出發的跡線圖。



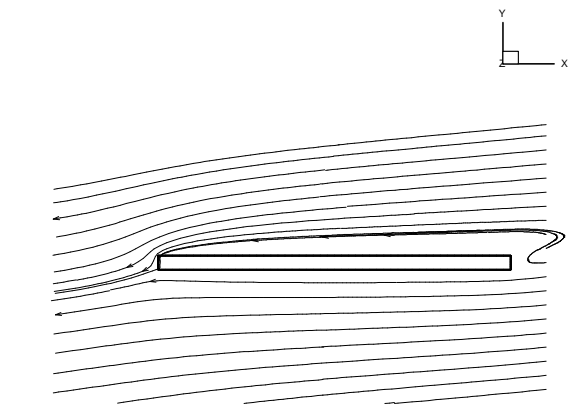
圖六、逆向運算在量測位置 2 所得的結果。



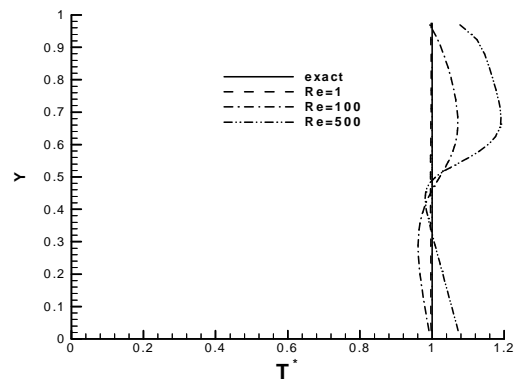
圖四、逆向運算在量測位置 1 所得的結果。



圖七、由 λ_f^* 所視從量測位置 4 出發的跡線圖。



圖五、由 λ_f^* 所視從量測位置 2 出發的跡線圖。



圖八、逆向運算在量測位置 4 所得的結果。